



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Questão 3:

I) Enuncie o Teorema Central do Limite.

Teorema (TCL). Considere $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média $E[X_1] = \mu$ e Variância $\text{Var}[X_1] = \sigma^2 < \infty$. Então vale a seguinte convergência em distribuição

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

em que $\bar{X}_n$ é a média amostral, isto é,

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

e a notação $\xrightarrow{D}$ indica a convergência em distribuição.

II) Esboce a prova do Teorema.

A base da prova é a utilização de funções características. Para provar a convergência em distribuição. Por simplicidade, e sem perda de generalidade, considere a sequência de variáveis aleatórias $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ definidas por

$$Y_i := \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$



$$\text{Então, } \begin{cases} E[Y_i] = E\left[\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} E[X_i - \mu] = \frac{1}{\sigma} (E[X_i] - \mu) = 0 \\ \text{Var}[Y_i] = \text{Var}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) = \text{Var}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}[X_i] = 1 \end{cases}$$

Observe a sequência $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ também é formada por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

A função característica de uma variável aleatória W ~~é~~ é definida por

$$\varphi_W(t) = E[e^{itW}] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Algumas de suas propriedades são

$$\varphi_W(0) = 1, \quad \varphi'_W(t) = E[iW e^{itW}] \quad \text{e} \quad \varphi''_W(t) = E[-W^2 e^{itW}]$$

É claro que para ~~as~~ as derivações acima fazermos sentido a variável W precisa ter os respectivos momentos finitos.

Assim, observe que

$$\varphi'_W(0) = iE[W] \quad \text{e} \quad \varphi''_W(0) = -E[W^2]$$



Agora note que definindo a sequência $(Z_n)_{n \geq 0}$ de variáveis aleatórias por

$$Z_n := \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

obtemos

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right)}{\sigma} = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu \right)}{\sigma} \\ &= \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \right)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \end{aligned}$$

ou seja,

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$$

Agora a função característica de Z_n é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(t) &= E[e^{itZ_n}] = E\left[e^{it \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \right)}\right] = E\left[e^{it \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \frac{1}{\sqrt{n}}}\right] \\ &= \varphi_{\sum_{i=1}^n Y_i} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Como as variáveis Y_i são independentes obtemos

$$\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{Y_i} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Por outro lado, como $\sqrt[n]{n}$ Y_i 's são identicamente distribuídas obtemos

$$\phi_{Z_n}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right) = \prod_{i=1}^n \phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right) = \left[\phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right)\right]^n$$

É possível mostrar que como as variáveis Y_i 's tem segundo momento finito, então a seguinte expansão de Taylor vale em torno de 0.

$$\phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right) = \phi_{Y_1}(0) + \phi'_{Y_1}(0) \frac{t}{\sqrt[n]{n}} + \frac{\phi''_{Y_1}(0)}{2n} t^2 + \text{Termo pequeno}$$

$$\text{Como } \phi_{Y_1}(0) = 1, \phi'_{Y_1}(0) = i E[Y_1] = 0 \text{ e } \phi''_{Y_1}(0) = -E[Y_1^2] = -1$$

, temos que

$$\phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \text{Termo pequeno}$$

Assim,

$$\phi_{Z_n}(t) = \left[\phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt[n]{n}}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \text{Termo pequeno}\right]^n$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{Z_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \text{Termo pequeno}\right]^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

como a função $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$, e é a função característica de uma variável aleatória Normal Padrão, isto é, $Z \sim N(0, 1)$. Obtemos que a sequência $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge em distribuição para Z .

Assim a ideia da demonstração está aprovada.

III) Considere $(X_j)_{j \geq 1}$ um sequência de Variáveis Aleatórias independentes com a seguinte distribuição de probabilidade

$$IP(X_j = \frac{1}{\sqrt{j}}) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad IP(X_j = -\frac{1}{\sqrt{j}}) = \frac{1}{2}$$

Agora considere a soma $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$. Como desejamos utilizar a mesma estratégia da demonstração do Teorema Central do Limite para calcular a convergência em Distribuição da soma S_n , devemos trabalhar com a função característica e sua expansão de Taylor em torno de 0. ~~Vamos calcular~~

Vamos calcular então o dois primeiros momentos de uma X_j .



Para a esperança de X_j temos

$$E[X_j] = \frac{1}{\sqrt{j}} IP(X_j = \frac{1}{\sqrt{j}}) + \left(-\frac{1}{\sqrt{j}}\right) IP(X_j = -\frac{1}{\sqrt{j}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot \frac{1}{j} + \left(-\frac{1}{\sqrt{j}}\right) \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \frac{1}{\sqrt{j}} - \frac{1}{j} \frac{1}{\sqrt{j}} = 0$$

Agora note que a variância pode ser calculada por

$$\text{Var}[X_j] = E[X_j^2] - (E[X_j])^2 = E[X_j^2]$$

~~pois~~ pois $E[X_j] = 0$, segue que basta calcular $E[X_j^2]$.

Assim

$$E[X_j^2] = \left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^2 IP(X_j = \frac{1}{\sqrt{j}}) + \left(-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^2 IP(X_j = -\frac{1}{\sqrt{j}}) =$$

$$= \frac{1}{j} \frac{1}{j} + \frac{1}{j} \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{j} \cdot \frac{2}{j} = \frac{1}{j}$$

Portanto $\text{Var}[X_j] = \frac{1}{j}$.

Vamos trabalhar agora com a função característica de S_n e X_j . Inicialmente note que

$$\varphi_{S_n}(r) = E[e^{i r S_n}] = E\left[e^{i r \sum_{j=1}^n X_j}\right] = \varphi_{\sum_{j=1}^n X_j}(r)$$

Como as X_j 's são independentes temos que



$$\mathcal{L}_{S_n}(r) = \prod_{j=1}^n \mathcal{L}_{X_j}(r)$$

em torno de 0

Por outro lado, pela expansão de Taylor^V para $\mathcal{L}_{X_j}$ obtemos que

$$\mathcal{L}_{X_j}(r) = \mathcal{L}_{X_j}(0) + \mathcal{L}'_{X_j}(0)r + \frac{\mathcal{L}''_{X_j}(0)}{2}r^2 + \text{termo pequeno}$$

$$\text{Dado que } \mathcal{L}_{X_j}(0)=1, \mathcal{L}'_{X_j}(0)=E[X_j]=0 \text{ e } \mathcal{L}''_{X_j}(0)=-E[X_j^2]=-\frac{1}{j}$$

Temos que

$$\mathcal{L}_{S_n}(r) = \prod_{j=1}^n \left[1 - \frac{r^2}{2j} + \text{termo pequeno} \right]$$

Agora se for possível mostrar que

$$(\ast\ast) \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n \left[1 - \frac{r^2}{2j} \right] = e^{-\frac{r^2}{2}} \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Então teremos mostrado que S_n converge em distribuição para $Z \sim N(0,1)$. Em particular, bastaria mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \log\left(1 - \frac{r^2}{2j}\right) = -\frac{r^2}{2}$$

$$\text{Pois } \prod_{j=1}^n \left[1 - \frac{r^2}{2j} \right] = e^{\log\left(\prod_{j=1}^n \left[1 - \frac{r^2}{2j} \right]\right)} = e^{\sum_{j=1}^n \log\left(1 - \frac{r^2}{2j}\right)}$$



e assim por continuidade de $x \mapsto e^x$ obteríamos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n \left[1 - \frac{\Gamma^2}{2j} \right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sum_{j=1}^n \log \left(1 - \frac{\Gamma^2}{2j} \right)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \log \left(1 - \frac{\Gamma^2}{2j} \right)}.\end{aligned}$$

Questão 2

F) Enuncie o Teorema de Green - Gauss - Stokes em $\mathbb{R}^3$ para a divergência e para o rotacional.

Vamos começar pelo Teorema de Green - Gauss - Stokes para a divergência. Esse resultado também é conhecido como o Teorema de Gauss.

Vamos utilizar as seguintes notações:

* dV denota o elemento de volume infinitesimal.

** $d\vec{S}$ denota o elemento de superfície infinitesimal.

*** $\langle F, d\vec{S} \rangle$ denota o produto interno entre um campo vetorial F e o vetor normal $\vec{n}$ à superfície S .



Com essas notações podemos enunciar o Teorema de Gauss. para $\mathbb{R}^3$

Teorema (Gauss) Considere $V \subset \mathbb{R}^3$ um volume fixo seja, um conjunto fechado, limitado e com fronteira suave que denotamos por $S := \partial V$. Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Então a seguinte igualdade vale

$$\iiint_V \operatorname{div}(F) d\vec{V} = \iint_S \langle F, d\vec{S} \rangle$$

em que div é o operador divergente $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$.

Passamos agora para o rotacional. e para isso, precisamos de mais algumas notações

* $d\vec{x}$ é o elemento de arco infinitesimal dado em relação ao bordo de uma superfície S .

** $\langle F, d\vec{x} \rangle$ é o produto interno entre ~~o~~ o campo F e o vetor tangente ao bordo da superfície S .



Observação: lembre que o rotacional de um campo vetorial pode ser "calculado" pela seguinte fórmula

$$\text{rot}(F) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

em que $\det$ é o determinante da "matriz" acima, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ são os vetores canônicos de $\mathbb{R}^3$ e

$$F = (F_1, F_2, F_3).$$

Para o enunciado do Teorema de Green-Gauss-Stokes em $\mathbb{R}^3$, também conhecido como Teorema de Stokes Simples.

Teorema (STOKES) Considere $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície suave com bordo $\Gamma := \partial S$ também suave. ~~podendo ser~~ parametrizado por uma curva γ fechada. Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Então a seguinte igualdade vale

$$\iint_S \langle \text{rot}(F), d\vec{S} \rangle = \oint_{\Gamma} \langle F, d\vec{x} \rangle$$



Questão 2)

II) Considere $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável.

Verifique que

$$\iiint_V \Delta u \, d\vec{V} = \iint_S \langle \nabla u, d\vec{S} \rangle$$

com $S := \partial V$.

Resolução: Como u é pelo menos de classe C^2 para que o operador Laplaciano Δ exista, podemos considerar a seguinte igualdade

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$$

em que ∇ é o operador Gradiente. Considerando V um volume e S uma superfície que satisfazem o Teorema da divergência (ou de Gauss), temos que

$$\iiint_V \Delta u \, d\vec{V} = \iiint_V \operatorname{div}(\nabla u) \, d\vec{V} = \iint_S \langle \nabla u, d\vec{S} \rangle.$$



III) Observação o Teorema de Gauss pode também ser aplicado a cubos por exemplo, pois nesse caso apesar da superfície do cubo não ser suave temos que é suave por partes e as partes não diferenciáveis tem volume zero. Assim também podemos usar o Teorema de Gauss para responder esse item.

Logo para saber como as faces opostas de R contribuem para a integral de superfície

$$\iint_{\partial R} \langle \nabla u, dn \rangle$$

Basta calcular a integral

$$\iiint_R \operatorname{div}(\nabla u) d\vec{R}$$

Para isso precisamos do Teorema de Fubini e do Teorema de mudança de coordenadas.



V) Vamos mostrar que

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right).$$

Primeiro escrevemos u como

$$u(r, \phi, \theta) := u(X(r, \phi, \theta), Y(r, \phi, \theta), Z(r, \phi, \theta))$$

Assim temos pela regra da cadeia para $\frac{\partial u}{\partial r}$ que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

Como

$$\frac{\partial x}{\partial r}(r, \phi, \theta) = \cos(\phi) \cdot \sin(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial r}(r, \phi, \theta) = \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)$$

$$\text{e } \frac{\partial z}{\partial r}(r, \phi, \theta) = \cos(\theta).$$

obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos(\phi) \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin(\phi) \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos(\theta)$$

Agora para $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ Também temo pela regra da cadeia que

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Como

$$\frac{\partial x(r, \phi, \theta)}{\partial \theta} = r \cos(\phi) \cos(\theta), \quad \frac{\partial y(r, \phi, \theta)}{\partial \theta} = r \sin(\phi) \cos(\theta)$$

$$\text{e } \frac{\partial z(r, \phi, \theta)}{\partial \theta} = -r \sin(\theta).$$

Assim obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot r \cos(\phi) \cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r \sin(\phi) \cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot r \sin(\theta)$$

Por fim, para $\frac{\partial u}{\partial \phi}$ Temos

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi}$$

Como

$$\frac{\partial x(r, \phi, \theta)}{\partial \phi} = -r \sin(\phi) \cdot \sin(\theta), \quad \frac{\partial y(r, \phi, \theta)}{\partial \phi} = r \cos(\phi) \sin(\theta)$$

$$\text{e } \frac{\partial z(r, \phi, \theta)}{\partial \phi} = 0$$

Assim obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta).$$



Para obtermos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -r\sin(\phi)\sin(\theta) & r\cos(\phi)\sin(\theta) & 0 \\ r\cos(\phi)\cos(\theta) & r\sin(\phi)\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Se quisermos obter o gradiente ∇u ~~em relação~~

~~nas~~

em relação ao gradiente $\nabla \tilde{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$

precisaremos inverter a
matriz

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -r\sin(\phi)\sin(\theta) & r\cos(\phi)\sin(\theta) & 0 \\ r\cos(\phi)\cos(\theta) & r\sin(\phi)\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \end{bmatrix}$$